Exercice 1

Soit la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2\ln(x)$.

1. Calculer les limites aux bornes du domaine de définition de g.
2. (a) Montrer que $\forall \in]0;+\infty[$ $g'(x) = -4x\ln(x)$
   (b) Dresser le tableau de variation de g
3. (a) Montrer que l'equation $g(x) = 0$ admet dans $]0;+\infty[$ une unique solution α.
   (b) Donner un encadrement de α à 10^{-1} prés.
   (c) Déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$
4. On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{1+x^2}$.
   (a) Calculer les limites aux bornes du domaine de définition de f.
   (b) Montrer que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\forall \in]0;+\infty[$ $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x(1+x^2)}$
   (c) Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{1}{2\alpha^2}$
5. Tracer la courbe de f.

Exercice 2

Soit g la fonction définie par $g(x) = 1 - x^2 - 2\ln|x|$

1. Déterminer D_g et les limites aux bornes de D_g.
2. Étudier les variations de g.
3. Calculer $g(1)$ et $g(-1)$, en déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}^*$.
4. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 2 - x + \dfrac{1+2\ln|x|}{x}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o;\vec{u};\vec{v})$ d'unité graphique $2cm$.
5. Déterminer les limites de f aux bornes de l'intervalle $\mathbb{R}^*$.
6. Calculer $f'(x)$ et montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*$; $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$
7. Dresser le tableau de variation de f.
8. Montrer que $f(\alpha) = -\alpha + 2 + \dfrac{2}{\alpha}$
9. Montrer que la droite (δ) : d'équation $y = 2 - x$ est une asymptote oblique à C_f en ∞.
10. Étudier la position relative de (δ) par rapport à la C_f
11. Montrer que le point $A(0;2)$ est un centre de symétrie à la courbe de f.
12. Tracer dans le même repère la droite (δ) et la courbe C_f de f.

Exercice 3

Soit u la fonction définie par $u(x) = x^2 - 2 + \ln(x)$

1. Étudier les variations de u.
2. Montrer que l' equation $u(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α.
3. Donner un encadrement de α à 10^{-2} prés.
4. Déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$
5. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x - 1 + \dfrac{1-\ln(x)}{x}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o;\vec{u};\vec{v})$ d'unité graphique $1cm$.
6. Déterminer les limites de f aux bornes du domaine de définition.
   Interpréter si possible les résultats obtenus.
7. Calculer $f'(x)$ sur tout intervalle ou f est dérivable et montrer que $\forall x \in]0;+\infty[$; $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$
8. Dresser le tableau de variation de f.
9. Montrer que $f(\alpha) = 2\alpha - 1 - \dfrac{1}{\alpha}$
10. Montrer que C_f admet une asymptote oblique (D) en $+\infty$ dont on précisera l'équation.
11. Étudier la position relative de la droite (D) par rapport à la courbe C_f
12. Tracer dans un même la courbe C_f et la droite (D).

Exercice 4

f est la fonction définie par $f(x) = (2x+1)e^{-2x}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o;\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$ d'unité graphique $2cm$.

1. (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$. interpréter si possible
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. (a) Déterminer le point d' intersection de la courbe de f avec l'axe (ox).
   (b) Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x
4. Tracer l'allure de la courbe de f.

Exercice 5

Soient g_1 et g_2 les fonctions définies par $g_1(x) = xe^{-x}$ et $g_2(x) = x^2e^{-x}$

1. (a) Étudier les limites de g_1 et g_2 en $+\infty$ et $-\infty$. Interpréter graphiquement les résultats.
   (b) Étudier les variations de g_1 et g_2
2. Dans un repère orthonormé $(o;\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$ d'unité graphique cm. on note C_1 et C_2 les courbes représentatives de g_1 et g_2
   (a) Préciser la position relative des deux courbes.
   (b) Tracer les deux courbes
3. (a) Donner une equation de la tangente à la courbe C_1 au point d'abscisse a. (a réel)
   (b) Cette tangente coupe l'axe des ordonnées en un point N Déterminer en fonction de a l'ordonnée de N

Exercice 6

1. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x + x + 1$.
   (a) Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$. et vérifier que $-1,28 < \alpha < -1.27$
   (c) Déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
2. f est la fonction définie par $f(x) = \dfrac{xe^x}{e^x+1}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o;\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$.
   (a) Montrer que $f(\alpha) = \alpha + 1$
   (b) En déduire un encadrement de $f(\alpha)$

   (a) Déterminer les limites aux bornes du domaine de définition.
   (b) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à C_f
   (c) Étudier la position relative de C_f par rapport à (D).
3. Montrer que $f'(x) = \dfrac{e^x g(x)}{(1+e^x)^2}$
4. Dresser le tableau de variation de f
5. Tracer la courbe de f.

Exercice 7

1. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2e^x - x - 2$
   (a) Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions 0 et α et que $-1.6 < \alpha < -1.5$.
   (c) Déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
2. f est la fonction définie par $f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o;\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$.
   (a) Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{-(\alpha^2+2\alpha)^2}{4}$
   (b) En déduire un encadrement de $f(\alpha)$

   (a) Déterminer les limites aux bornes du domaine de définition.
3. Montrer que $f'(x) = e^x g(x)$
4. Dresser le tableau de variation de f
5. Tracer la courbe de f.

Exercice 8

On considère f la fonction définie par $f(x) = x + 1 - \dfrac{2e^x}{e^x+1}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o;\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$.

1. Montrer que f est une fonction impaire puis interpréter graphiquement le résultat.
2. Montrer que pour tout réel x, $f(x) =$

$x + 1 - \dfrac{2}{1+e^{-x}}$.
En déduire la limite de f en $+\infty$.

3. Montrer que pour tout réel x, $f(x) - (x - 1) = \dfrac{2}{e^x + 1}$
En déduire que la droite Δ d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique à C_f en $+\infty$.
4. Préciser la position de C_f par rapport à Δ.
5. Montrer que f est dérivable pour tout x et calculer la fonction dérivée $f'(x)$.
6. Dresser le tableau de variation de f.
7. Tracer la courbe de f.

Exercice 9

f est la fonction définie par $f(x) = x - 2 + (-4 - 2x)e^{-\frac{x}{2}}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$.

Partie A

Soit g la fonction définie par : $g(x) = x + e^{\frac{x}{2}}$

1. Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$
2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique λ et que $-0,71 < \lambda < -0,70$
3. Déduire alors le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$

Partie B

1. Calculer : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ interpréter le résultat.
2. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
3. Montrer que la droite Δ d'équation $y = x - 2$ est une asymptote oblique à C_f en $+\infty$
4. Étudier la position relative de C_f par rapport à Δ.
5. Calculer la fonction dérivée $f'(x)$ de f et montrer que $f'(x) = g(x)e^{\frac{-x}{2}}$.
6. Dresser le tableau de variation de f.
7. Montrer que $\forall x [-2; 0], -2e + 1 \leq f'(x) \leq 1$
8. Tracer la courbe représentative de la fonction f on prend $f(\alpha) = -6.4$.

Exercice 10

1. Soit g la fonction définie par $g(x) = -1 + (x^2 - 2x + 3)e^{-x}$
2. (a) Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.
(b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α et que $0.7 < \alpha < 0.8$.
(c) Déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

f est la fonction définie par $f(x) = -x + 4 - (x^2 + 3)e^{-x}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$.

3. (a) Déterminer les limites aux bornes du domaine de définition.
(b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = g(x)$
(c) Dresser le tableau de variation de f
(d) Montrer que $f(\alpha) = -\alpha + 4 - \dfrac{\alpha^2 + 3}{\alpha^2 - 2\alpha + 3}$
(e) En déduire un encadrement de $f(\alpha)$
4. Démontrer que la droite (D) d'équation $y = -x + 4$ est une asymptote oblique à C_f en $+\infty$.
5. Étudier la position relative de C_f par rapport à (D).
6. On admet que la courbe f coupe l'axe des abscisses aux points $x_1 = -0.4$ et $x_2 = 3.6$ Tracer la courbe de f.

Exercice 11

f est la fonction définie par $f(x) = 3x - 8 + \dfrac{16}{1 + e^x}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$.

Partie A

Soit u la fonction définie par : $u(x) = 3e^{2x} - 10e^x + 3$

1. Montrer que $u(x) = (3e^x - 1)(e^x - 3)$
2. Étudier le signe de $u(x)$ sur $\mathbb{R}$

Partie B

1. Calculer : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2. Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$
3. Montrer que la droite Δ d'équation $y = 3x - 8$ est une asymptote oblique à C_f en $+\infty$
4. Étudier la position relative de C_f par rapport à Δ.
5. Calculer la fonction dérivée $f'(x)$ de f et montrer que $f'(x) = \dfrac{u(x)}{(1+e^x)^2}$.
6. Dresser le tableau de variation de f.
7. Calculer $f(x) + f(-x)$ et en déduire la parité de f puis interpréter graphiquement le résultat.
8. Tracer la courbe représentative de la fonction f on admet que la courbe coupe la droite(ox) aux abscisses 2 et -2.

Partie C

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(x) - (3x - 8)$

1. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = 16 - \dfrac{16e^x}{1+e^x}$
2. En déduire les primitives de h sur $\mathbb{R}$
3. Calculer en cm^2, l'aire du domaine plan limité par C_f, la droite Δ et les droites d'équations $x = 3$ et $x = 4$.

Exercice 12

1. Soit la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = (3x-3)e^{x-1} - 1$
   (a) Étudier les variations de u sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α et que $1.25 < \alpha < 1.26$.
   (c) Déduire le signe de $u(x)$ sur $\mathbb{R}$.
2. f est la fonction définie par $g(x) = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2}(x-2)e^{x-1}$ et C_g sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o; \vec{u}; \vec{v})$.
   (a) Déterminer les limites aux bornes du domaine de définition.
   (b) Montrer que la droite Δ d'équation $y = \dfrac{1}{2}x$ est une asymptote oblique à C_g en $+\infty$
   (c) Étudier la position relative de C_g par rapport à Δ.
   (d) Montrer que $g(\alpha) = \dfrac{1}{2}(\alpha - 1 + \dfrac{1}{\alpha - 1})$
   (e) En déduire un encadrement de $g(\alpha)$
   (f) Montrer que $g'(x) = -\dfrac{1}{2}u(x)$ pour tout x réel.
   (g) Dresser le tableau de variation de g
   (h) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions β_1 et β_2 vérifiant : $-1.13 < \beta_1 < -1.12$ et $2.21 < \beta_2 < 2.22$
3. Tracer la courbe de g.

Exercice 13

Soit u la fonction définie par : $u(x) = e^x - x - 1$

1. Étudier les variations de $u(x)$ sur $\mathbb{R}$
2. En déduire le signe de $u(x)$ sur $\mathbb{R}$
3. Montrer que pour tout x réel $e^x - x > 0$

On considère la fonction$f$ définie par $f(x) = \dfrac{x}{e^x - x}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o; \vec{u}; \vec{v})$.

1. Calculer : $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que la fonction dérivée $f'(x)$ vérifie que $f'(x) = \dfrac{(1-x)e^x}{(e^x - x)^2}$.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Tracer la courbe représentative de la fonction f.